- الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي: نعرض أن لدينا متغير عشوائي X فإن مصاحب احتمالي $F_X(x) = P\{X < x\}$ ، $x \in R$ عندئذ بالتعريف نلاحظ (D.F.P)

- ومن أهم خصائص هذه الدالة:

1) $0 \le F_X(x) \le 1$

2) $F_X(x)$ غير متناقصة.

3) $F(-\infty) = 0$ ، $F_X(+\infty) = 1$

4) مستمرة من اليسار أي $F_X(x-0) = F_X(x)$

الدالة التوزيعية التي عرفناها هي دالة $F_X(x) = P\{X \le x\}, x \in R$ لمتغير عشوائي بالشكل:
لكن إذا عرفت الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي بالشكل: ... لكن بالنسبة للخاصة رقم 4 فلاحظ عندئذ هذه الدالة تحقق الخصائص الثلاثة الأولى و لكن بالنسبة للخاصة رقم 4 مستمرة من اليمين أي $F_X(x+0) = F_X(x)$.

- ملاحظة: إذا كان لدينا X متغيراً عشوائياً و $F_X(x)$ هو عبارة عن دالته التوزيعية حيث $P\{X = x\} = 0, \forall x \in R$ لدينا يجب أن
أن هذه الدالة مستمرة عندئذ من أجل أي عدد حقيقي $\{X = x\} = \{X \le x\} - \{X < x\}$ أي أن الاحتمال معدوم وذلك لأن
(حيث $\{X < x\}$ أصغر من $\{X \le x\}$)

$$P\{X = x\} = P\{X \le x\} - P\{X < x\}$$
$$= F_X(x+0) - F_X(x-0)$$

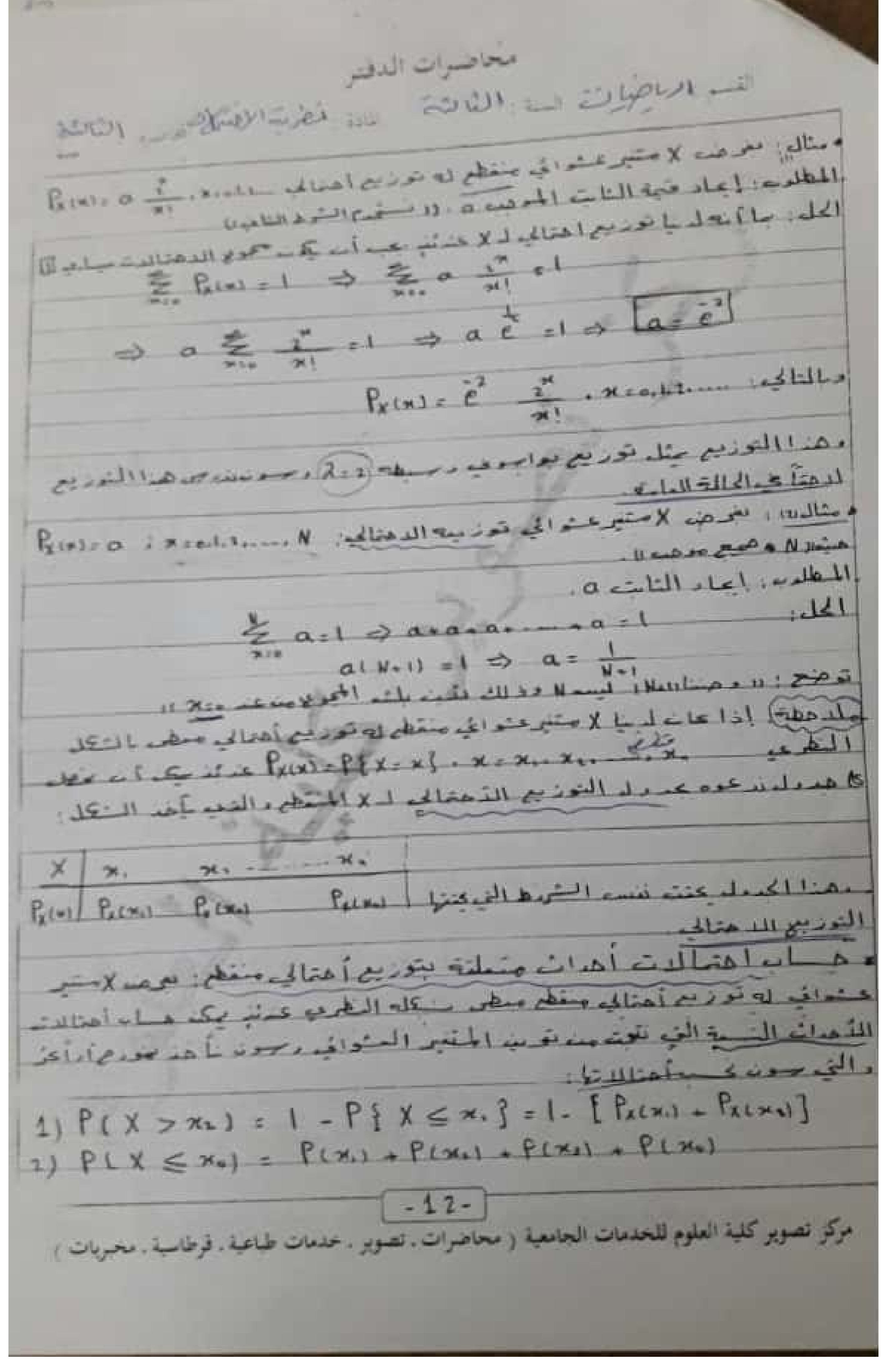
حيث $F_X(x+0)$ «أي أن من الدالة التوزيعية مستمرة من اليمين حسب التعريف»
و $F_X(x-0)$ « « « « « من اليسار « «
$$= F_X(x) - F_X(x)$$
$$= 0$$

- أنواع المتغيرات العشوائية: سوف ندرس نوعين من المتغيرات العشوائية.
1) المتغير العشوائي المتقطع.
2) المتغير العشوائي المستمر.

- تعريف «المتغير العشوائي المتقطع»: نقول عن المتغير العشوائي X أنه من النوع المتقطع إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها هذا المتغير مجموعة قابلة للعد قد تكون منتهية أو غير منتهية (والمجموعة القابلة للعد هي المجموعة التي يمكن مقابلة عناصرها مع عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية أو جزء منها أي أنها قد تكون منتهية أو غير منتهية) وسوف نرمز لدالة الاحتمال للمتغير العشوائي المتقطع $P_X(x) = P\{X = x\}$; $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ بأنه يمثل التوزيع الاحتمالي إذا تحقق ما يلي:

1) $P_X(x) \ge 0, \forall x = x_1, x_2, \dots, x_n$

2) $\sum_x P_X(x) = 1$



• مثال: نفرض X متغير عشوائي منفصل له توزيع احتمالي $P_X(x) = a\,\frac{2^x}{x!},\ x=0,1,2,\dots$

المطلوب: إيجاد قيمة الثابت الموجب a. ((باستخدام الشرط الثاني))

الحل: بما أنه لدينا توزيع احتمالي لـ X عندئذ يجب أن يكون مجموع الاحتمالات مساوي [1]

$$\sum_{x=0}^{\infty} P_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} a\,\frac{2^x}{x!} = 1$$

$$\Rightarrow a \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} = 1 \Rightarrow a\,e^{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = e^{-2}}$$

وبالتالي:

$$P_X(x) = e^{-2}\,\frac{2^x}{x!},\ x=0,1,2,\dots$$

• هذا التوزيع يمثل توزيع بواسون وسيطه $\lambda = 2$ وسوف نتعرف على هذا التوزيع لاحقاً في الحالة العامة.

• مثال(2): نفرض X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي: $P_X(x) = a\ ;\ x=0,1,2,\dots,N$ حيث N عدد صحيح موجب.

المطلوب: إيجاد الثابت a.

الحل:

$$\sum_{x=0}^{N} a = 1 \Rightarrow a+a+a+\dots+a = 1$$

$$a(N+1) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{N+1}$$

توضيح: ((وضعنا (N+1) وليس N وذلك لأننا بدأنا العد من $x=0$))

ملاحظة: إذا كان لدينا X متغير عشوائي منفصل له توزيع احتمالي معطى بالشكل الطرفي $P_X(x) = P\{X=x\},\ x=x_1,x_2,\dots,x_n$ عندئذ يمكن أن نعطي هذا ما ندعوه بجدول التوزيع الاحتمالي لـ X المنفصل والذي يأخذ الشكل:

X	x_1	x_2	...	x_n
$P_X(x)$	$P_X(x_1)$	$P_X(x_2)$		$P_X(x_n)$

وهذا الجدول يحقق نفس الشروط التي يحققها التوزيع الاحتمالي.

• حساب احتمالات أحداث متعلقة بتوزيع احتمالي منفصل: نفرض X متغير عشوائي له توزيع احتمالي منفصل معطى بشكله الطرفي عندئذ يمكن حساب احتمالات الأحداث النسبية التي تعرف من قيم المتغير العشوائي وسوف نأخذ بعض الأمثلة والتي سوف نحسب احتمالاتها:

1) $P(X > x_2) = 1 - P\{X \le x_2\} = 1 - [P_X(x_1) + P_X(x_2)]$

2) $P(X \le x_4) = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$

3) $P(x_1 < X \leq x_n) = P(x_2) + P(x_3) + P(x_n)$

مثال: نفرض X متغير عشوائي له توزيع احتمالي معطى بالشكل

$P_X(x) = a(\frac{1}{2})^x ; x = 0,1,2,\dots$

المطلوب:

1) عين قيمة الثابت الموجب a

2) ما هو احتمال $P(X<0)$

3) $P(X \geq 0)$

4) $P(X \geq 1)$

5) $P(0<X<3)$

6) $P(2<X\leq 4)$

الحل:

1) $\sum_{x=0}^{\infty} P_X(x) = 1 \Rightarrow a \sum_{x=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^x = 1$

" متسلسلة هندسية متقاربة بين ٠ ، ١ "

$\Rightarrow a \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$P_X(x) = (\frac{1}{2})^{x+1} ; x = 0,1,2,\dots$

$= (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^x$

2) $P(X<0) = P(\phi) = 0$

3) $P(X \geq 0) = 1 - P(X<0) = 1 - 0 = 1$ " مؤكد "

4) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

5) $P(0<X<3) = P(1) + P(2) = (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{8}) = \frac{3}{8}$

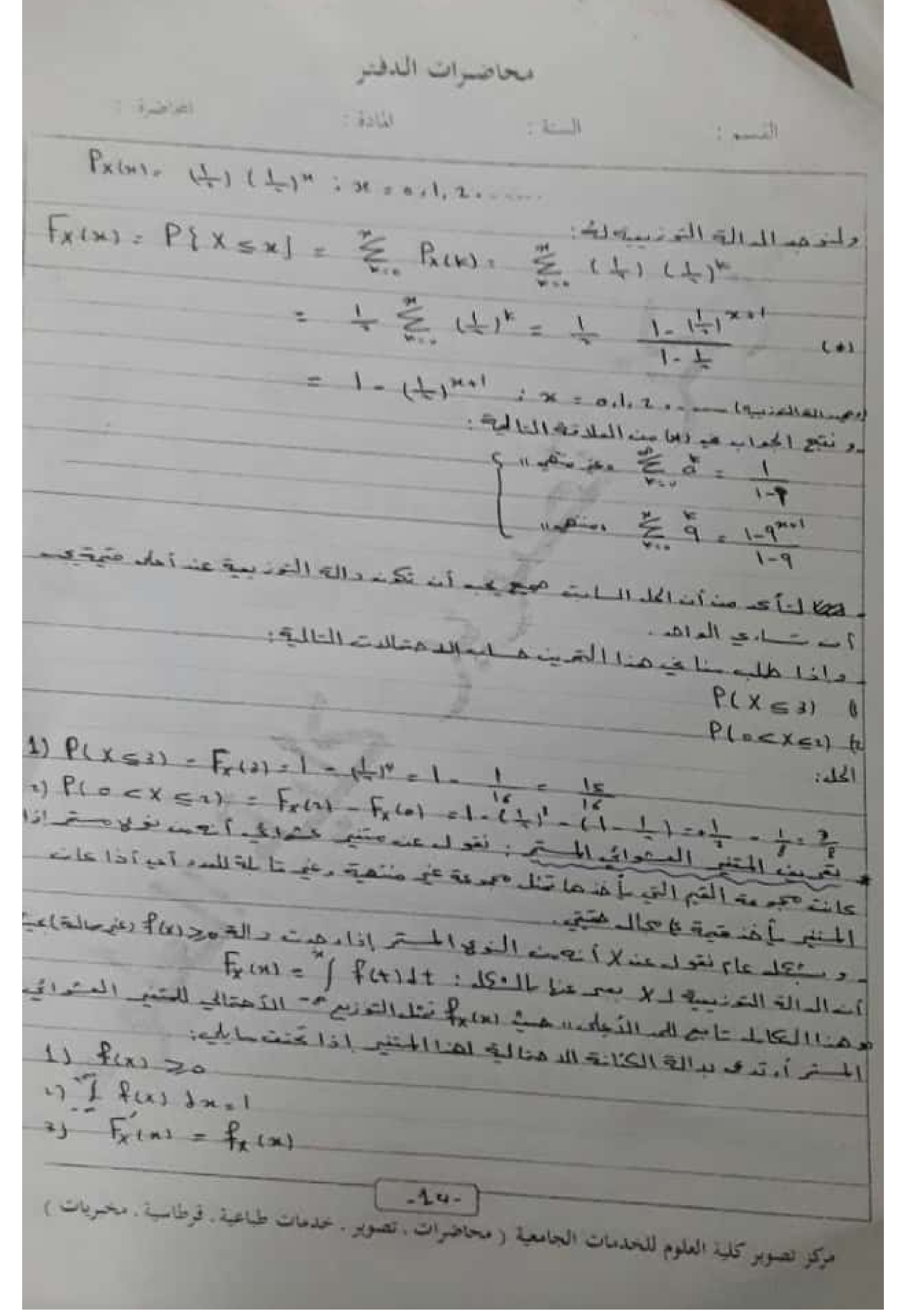
6) $P(2<X\leq 4) = P(3) + P(4) = (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^5$

تعريف الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي منفصل: نفرض X متغير عشوائي له توزيع احتمالي منفصل معطى بالشكل الطبيعي عندئذ بالتعريف الدالة التوزيعية لهذا المتغير

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k \leq x} P_X(k) = \sum_{k=x_1}^{x} P_X(k)$$

في المجموعة أخذنا $k \leq x$ وذلك ليحصل عندما يكون المتغير عشوائي منفصل تكون x نقطة داخلة في المجموعة "

ومن أجل فهم كيفية الحصول على الدالة التوزيعية في حال المتغير العشوائي منفصل سوف نعود إلى المثال السابق والذي كان فيه $P_X(x) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^x ; x = 0,1,2,\dots$



$P_X(x) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^x \; ; \; x = 0,1,2,\ldots$

ولنوجد الدالة التوزيعية لـ:

$F_X(x) = P\{X \le x\} = \sum_{k=0}^{x} P_X(k) = \sum_{k=0}^{x} (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^k$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{x} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{x+1}}{1-\frac{1}{2}}$ (*)

$= 1-(\frac{1}{2})^{x+1} \; ; \; x = 0,1,2,\ldots$ وهي الدالة التوزيعية

ونتج الجواب في (*) من العلاقة التالية:

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ "غير منتهية"

$\sum_{k=0}^{x} q^k = \frac{1-q^{x+1}}{1-q}$ "منتهية"

للتأكد من أن الحل السابق صحيح يجب أن تكون دالة التوزيعية عند أعلى قيمة تساوي الواحد. أي تساوي الواحد.

وإذا طلب منا في هذا التمرين حساب الاحتمالات التالية:

a) $P(X \le 3)$

b) $P(0 < X \le 2)$

الحل:

1) $P(X \le 3) = F_X(3) = 1 - (\frac{1}{2})^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

2) $P(0 < X \le 2) = F_X(2) - F_X(0) = 1 - (\frac{1}{2})^3 - (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

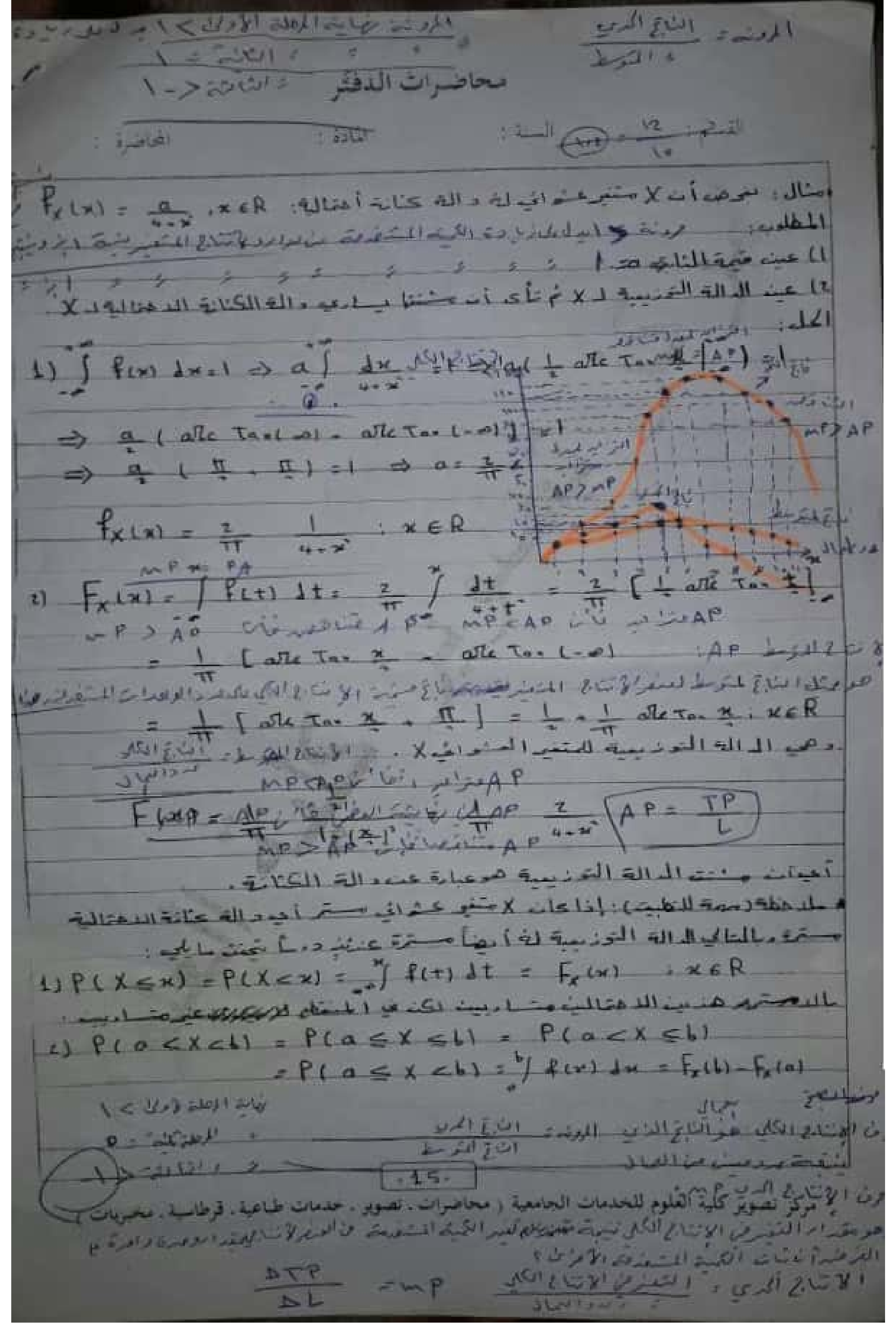
* تعريف المتغير العشوائي المستمر: نقول عن متغير عشوائي أنه من النوع المستمر إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها تمثل مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد أي إذا كان المتغير يأخذ قيمة في مجال حقيقي.

وبشكل عام نقول عن X أنه من النوع المستمر إذا وجدت دالة موجبة $f(x)$ (غير سالبة) بحيث أن الدالة التوزيعية لـ X يعبر عنها بالشكل: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ وهذا التكامل تابع للحد الأعلى، حيث $f_X(x)$ تمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر أو تدعى بدالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير إذا تحقق ما يلي:

1) $f(x) \ge 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3) $F'_X(x) = f_X(x)$



محاضرات الدفتر

مثال: نفرض أن X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية: $f_X(x) = \frac{a}{4+x^2}, x \in R$

المطلوب:

1) عين قيمة الثابت a

2) عين الدالة التوزيعية لـ X ثم تأكد أن مشتقتها يساوي دالة الكثافة الاحتمالية لـ X

الحل:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = a\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcTan}\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}\left(\operatorname{arcTan}(+\infty) - \operatorname{arcTan}(-\infty)\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\pi}$$

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{4+x^2} \;;\; x \in R$$

$$2) F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{4+t^2} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcTan}\frac{t}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arcTan}\frac{x}{2} - \operatorname{arcTan}(-\infty)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arcTan}\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arcTan}\frac{x}{2} \;;\; x \in R$$

وهي الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X.

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{4+x^2}$$

$AP = \frac{TP}{L}$

أحيانا مشتقة الدالة التوزيعية هي عبارة عن دالة الكثافة.

ملاحظة (مهمة للتطبيق): إذا كان X متغير عشوائي مستمر أي دالة كثافته الاحتمالية مستمرة، بالتالي الدالة التوزيعية له أيضا مستمرة عندئذ د. ت تحقق ما يلي:

$$1)\; P(X \leq x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F_X(x) \;;\; x \in R$$

بالمستمر هذين الاحتمالين متساويين لكن في المتقطع غير متساويين.

$$2)\; P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$$

$$= P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$$

$\frac{\Delta TP}{\Delta L} = MP$ الإنتاج الحدي = التغير في الإنتاج الكلي